МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ

«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ»

Інститут енергозбереження та енергоменеджменту

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ ТА ЗАВДАННЯ

до виконання розрахункової роботи з дисциплін

«ОБЧИСЛЮВАЛЬНА ТЕХНІКА ТА АЛГОРИТМІЧНІ МОВИ»
Частина 1. Алгоритми та їх реалізація
для студентів спеціальності
141 Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка

«ІНФОРМАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ»
Частина 1. Алгоритми та їх реалізація
для студентів спеціальності
144 Теплоенергетика

(навчальне електронне видання)

Київ, НТУУ «КПІ»
2016

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ

«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ»

Інститут енергозбереження та енергоменеджменту

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ ТА ЗАВДАННЯ

до виконання розрахункової роботи з дисциплін

«ОБЧИСЛЮВАЛЬНА ТЕХНІКА ТА АЛГОРИТМІЧНІ МОВИ»

Частина 1. Алгоритми та їх реалізація

для студентів спеціальності

141 Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка

«ІНФОРМАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ»

Частина 1. Алгоритми та їх реалізація

для студентів спеціальності

144 Теплоенергетика

(навчальне електронне видання)

Рекомендовано Вченою радою
Інституту енергозбереження та енергоменеджменту НТУУ «КПІ»

Київ, НТУУ «КПІ»

2016

Методичні вказівки та завдання до виконання розрахункової роботи з дисциплін «Обчислювальна техніка та алгоритмічні мови» та «Інформаційні технології» для студентів спеціальностей 141 Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка та 144 Теплоенергетика. Навчальне електронне видання [Електронний ресурс] / Уклад.: І.В. Притискач, Ю.О. Расько. – Київ: НТУУ «КПІ», 2016. – 21 с.

Гриф надано Вченою радою ІЕЕ НТУУ «КПІ»
(Протокол № від 2016 р.)

Н а в ч а л ь н е   е л е к т р о н н е   в и д а н н я

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ ТА ЗАВДАННЯ
до виконання розрахункової роботи з дисциплін

«ОБЧИСЛЮВАЛЬНА ТЕХНІКА ТА АЛГОРИТМІЧНІ МОВИ»
Частина 1. Алгоритми та їх реалізація
для студентів спеціальності
141 Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка

«ІНФОРМАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ»
Частина 1. Алгоритми та їх реалізація
для студентів спеціальності
144 Теплоенергетика

Укладачі: Притискач Іван Васильович, к.т.н., ст. викл.
Расько Юрій Олексійович, ас.

Відповідальний редактор Штогрин Євген Андрійович, к.т.н., доц.

Рецензент Данілін Олександр Валерійович, к.т.н., доц.

За редакцією укладачів

Зміст

Тема

Використання алгоритмічної мови C# для математичного моделювання складних арифметичних завдань та методів.

Мета

В спеціальних дисциплінах студенти виконують різноманітні інженерні розрахунки, зустрічаються з необхідністю використання різних методів обчислювальної математики. Дана розрахункова робота пов’язана з практичним використанням різноманітних квадратурних формул для обчислення визначених інтегралів.

Метою розрахункової роботи є опанування методів модульної побудови алгоритмів та їх реалізації за допомогою елементів алгоритмічної мови C# (циклів, розгалужень, масивів).

Завдання

Знайти площу фігури з заданою точністю, яка обмежена графіками функцій:

1. Розрахувати точки перетину заданих функцій.
2. Зобразити на координатній площині фігуру, площу якої потрібно обчислити.
3. Скласти блок-схему алгоритму для знаходження площі заданої фігури для кожного методу обчислення визначеного інтегралу, що вказані у варіанті завдання, та скласти її опис.
4. Написати програму на мові C# для обчислення площі заданої фігури методами відповідно до варіанту завдання.
5. Зробити висновки щодо переваг та недоліків використаних методів обчислення визначених інтегралів з обґрунтуванням.

Стислі теоретичні відомості

Для обчислення визначених інтегралів є точні й наближені методи. На практиці найчастіше доводиться використовувати наближені методи тому, що знайти аналітичні вирази для обчислення визначених інтегралів не завжди можливо. Задача наближеного обчислення визначених інтегралів базується на знаходженні ряду значень підінтегральної функції. При цьому будуються відповідні формули для знаходження значень визначених інтегралів, які звуться квадратурними й мають вигляд:

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_i^n A_i f(x_i)$$

Ці формули будуються різноманітними методами. Наприклад, для знаходження невідомих A_i та x_i використовуються додаткові умови:

1. коефіцієнти A_i при вибраному розташуванні вузлів x_i не залежать від виду підінтегральної функції $f(x)$;
2. для многочлену $P_n(x)$ степені n отримана квадратична формула є точною, оскільки у цьому випадку $f(x) \equiv P_n(x)$, тобто вона точна для усіх многочленів виду:

$$f(x) = x^k, (k = 0,1,2,..,n)$$

Підставляючи многочлени у квадратурну формулу, та обчислюючи значення інтегралів лівої частини квадратурної формули, будемо мати систему алгебраїчних рівнянь для визначення невідомих коефіцієнтів A_i.

Звичайним методом побудови квадратурних формул є спосіб, коли підінтегральну функцію $f(x)$ на відрізку інтегрування $[a, b]$ замінюють інтерполюючою функцією $\varphi(x)$ простого типу, а потім наближено вважають:

$$\int_a^b f(x)dx \cong \int_a^b \varphi(x)dx$$

Квадратурна формула може бути побудована з використанням геометричних уявлень. Покажемо це на прикладі квадратурної формули метода трапецій.

Нехай потрібно обчислити інтеграл:

$$\int_a^b f(x)dx$$

При умові, що $a,\ b$ - скінчені й підінтегральна функція $f(x)$ є неперервною функцією від x на всьому інтервалі $[a, b]$. З геометричних уявлень визначений інтеграл - це площа фігури, яка окреслена кривою $y = f(x)$. віссю X й прямими x=a та x=b (рис. 1). Обчислити цю площу можна так: розіб'ємо інтервал інтегрування *[a,b]* на n стрічок з малим кроком $h = \frac{b-a}{n}$, на кожному інтервалі довжиною h замінюємо функцію $f(x)$ відрізком прямої (рис.2) й визначаємо площу елементарної стрічки як площу трапеції S_i. При цьому похибка кожної обчисленої елементарної площі визначається заштрихованою не врахованою площею (рис. 2)

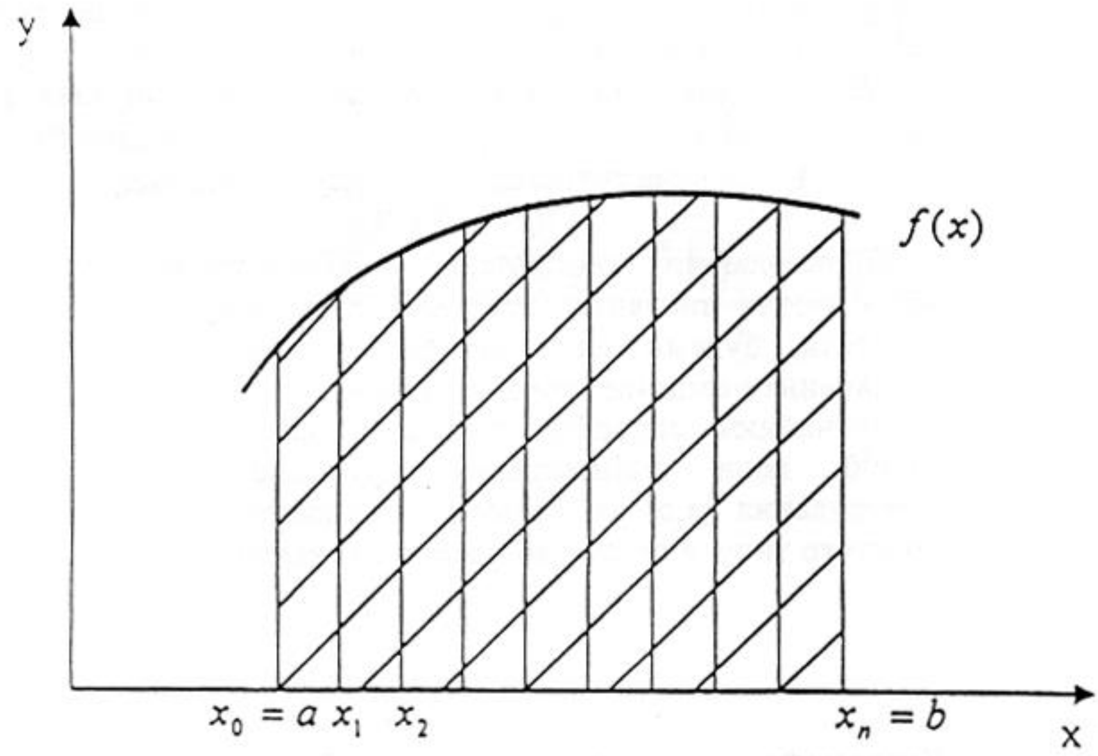

Рисунок 1 - Визначення елементарних стрічок площі підінтегральної функції

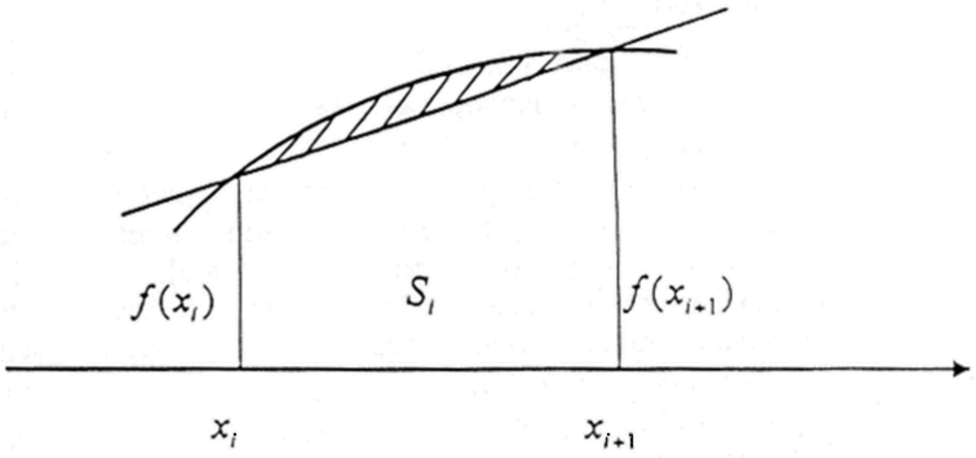

Рисунок 2 - Обчислення площі елементарної стрічки

Наближене значення інтеграла є сума усіх елементарних площ S_i, тобто:

$$I = \sum_{i=0}^{n-1} S_i = \frac{h}{2}\sum_{i=0}^{n-1}(f(x_i) + f(x_{i+1}))$$

Після нескладних перетворень маємо квадратурну формулу методу трапецій у вигляді:

$$I \cong h\left[\frac{f(a) + f(b)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\right], \text{де } h = \frac{b-a}{2}$$

Похибка цієї формули може бути визначена як $E_t \approx kh^2$. тобто величина похибки пропорційна квадрату кроку інтегрування.

Похибку обчислення інтегралу можна зменшити за рахунок ускладнення алгоритму метода. Наприклад, замінюючи підінтегральну функцію для двох сусідніх стрічок відрізком параболи, можливо побудувати більш точну квадратурну формулу, формулу Сімпсона, яка має вигляд:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3}\left[f(a) + f(b) + 4\sum_{i=1}^{n/2} f(x_{2i-1}) + 2\sum_{i=1}^{n/2} f(x_{2i})\right]$$

де n - обов'язково парна кількість стрічок.

Похибка формули Сімпсона визначається виразом $E_t \approx kh^4$,тобто пропорційна вже четвертій степені кроку інтегрування.

Із наведених формул зрозуміло, то точність обчислення значень інтегралів буде тим вища, чим меншим буде крок розбивання інтервалу інтегрування $[a,\ b]$. Ця обставина використовується для забезпечення потрібної точності реалізації квадратурних формул, при цьому задаються абсолютною похибкою ε, обчислення інтегралу.

Використовуючи свободу вибору кроку інтегрування $h = \frac{b-a}{n}$, будують наступну процедуру забезпечення точності:

1. Визначають початкову кількість кроків *n*.
2. За допомогою визначеної квадратурної формули обчислюють значення інтеграла I_n.
3. Подвоюють кількість кроків $\bar{n} = 2n$.
4. Розраховують нове значення інтеграла для *n* кроків.
5. Перевіряють умову:

$$|I_n - I_{\bar{n}}| \leq \varepsilon$$

Якщо ця умова не виконується, то знову виконують п.3,4,5.

Квадратурні Формули Чебишева і Гауса

Для створення квадратурних формул використовуються і інші методи. Наприклад, Чебишев запропонував при побудові квадратурної формули

$$\int_{-1}^{+1} f(t)dt = \sum_{i=1}^{n} A_i f(t_i)$$

вибирати абсциси t_i, таким чином, шоб:

1. коефіцієнти A_i були рівні поміж себе, тобто $A_1 = A_2 = \cdots$;
2. квадратурна формула має бути точною для всіх поліномів до степені n включно.

З урахуванням другої умови квадратурна формула є точною для поліномів виду $t^k, (k = 0,1,2, \dots, n)$ й зокрема для $f(t) = 1\ , (k = 0)$.

З урахуванням першої умови коефіцієнти A_i мають значення:

$$A_1 = A_2 = \dots = A_n = \frac{2}{n}$$

Значення абсцис t_i , обчислюються із рішення системи алгебраїчних рівнянь, яка будується з урахуванням другої умови.

Створена таким чином квадратурна формула зветься формулою Чебишева. Є таблиці для значень t_i (табл. 1).

Таблиця 1 – Значення абсцис за формулою Чебишева

n	3	4	5
t_1	-0,707107	-0,794654	-0,832498
t_2	0	-0,187592	-0,374541
t_3	0,707107	0,187592	0
t_4	-	0,794654	0,374541
t_5	-	-	0,832498

Якщо створювати квадратурну формулу так, щоб вузли $x_1, x_2, \dots, x_n$ й коефіцієнти $A_1, A_2, \dots, A_n$ забезпечили точність квадратурної формули

$$\int_{-1}^{+1} f(x)dx = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)$$

для всіх поліномів найбільш можливої степені *n,* то будемо мати так звану квадратичну формулу Гауса.

При побудові формули Гауса додатково треба взяти як значення x_i координати нулів полінома Лежандра

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{\partial^n}{\partial x^n}[(x^2-1)^n], (n = 0,1,2, \dots)$$

$$P_0(x) = 1;\ P_1(x) = x;\ P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2-1);\ P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3-3x)$$

а коефіцієнти A_i, знайти як рішення системи алгебраїчних рівнянь, побудованої звичайним шляхом. Створені таблиці значень x_i, та A_i формули Гауса, наприклад табл. 2.

Таблиця 2 – Значення x_i, та A_i за формулою Гауса

n	3	4	5
x_1	-0,77459667	-0,86113631	-0,90617985
x_2	0	-0,33998104	-0,53846931
x_3	0,77459667	0,33998104	0
x_4	-	0,86113631	0,53846931
x_5	-	-	0,90617985
A_1	5/9=0,55555556	0,34785484	0,23692688
A_2	8/9=0,88888889	0,65214516	0,47862868
A_3	5/9=0,55555556	0,65214516	0,568888889
A_4	-	0,34785484	0,47862868
A_5	-	-	0,23692688

Для того, щоб використати формулу Чебишева або Гауса для обчислення інтегралів загального виду $\int_a^b f(x)dx$, треба зробити заміну змінної

$$x = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2}t$$

Таким чином:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2}\int_{-1}^{+1} f\left(\frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2}t\right)dt$$

Застосовуючи відповідні квадратурні формули для обчислення заданого інтегралу, маємо:

формулу Чебишева:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)$$

формулу Гауса:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2}\sum_{i=1}^{n} A_i f(x_i)$$

$$\text{де } x_i = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2} t_i$$

t_i - значення вузлів, які знаходяться із відповідних таблиць.

Забезпечення заданої точності обчислення визначених інтегралів загального типу може бути здійснено одним з двох методів:

1. необхідна точність обчислення досягається за рахунок вибору більшої кількості вузлів *n* відповідної квадратурної формули;
2. може бути побудована процедура, аналогічна раніше використаній, коли обчислюваний інтеграл записується у вигляді суми двох, чотирьох, восьми й т.д. інтегралів, наприклад:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x)dx + \int_{\frac{a+b}{2}}^{b} f(x)dx$$

де кожний інтеграл обчислюється за допомогою квадратурної формули із фіксованою кількістю вузлів n. Значення початкового інтегралу знаходиться як сума:

$$I_n = \int_a^b f(x)dx = \sum_{j=1}^{m} \int_{c_j}^{c_{j+1}} f(x)dx, \text{де } h = \frac{b-a}{m}, c_j = a + (j-1)h$$

m - кількість ділянок довжиною h, на яку поділяється інтервал інтегрування $[a, b]$

Кількість m подвоюється до того часу, доки не буде виконуватись умова $|\mathrm{I_n} - \mathrm{I_{\bar{n}}}| \leq \varepsilon$ ($\bar{\mathrm{n}} = 2\mathrm{n}, \varepsilon -$ задана похибка обчислень).

Варіанти завдань

Точність, з якою потрібно знайти площу заданої фігури задається з клавіатури.

Для парних варіантів потрібно використовувати методи Трапецій та Гауса.

Для непарних варіантів потрібно використовувати методи Сімпсона та Чебишева.

Варіант 1

$$y = x^2 + 2x + 1$$
$$y = -x^2 + 2x$$
$$y = 0$$
$$x \in [1; 2]$$

Варіант 2

$$y = x^2 - 2x + 1$$
$$y = -x^2 + 2x$$
$$y = 1$$
$$x \in [1; 2]$$

Варіант 3

$$y = x^2 - 2x + 1$$
$$y = -x^2 + 2x$$
$$x \in [1 - \frac{1}{\sqrt{2}}; 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}]$$

Варіант 4

$$y = sin\, x$$
$$-\frac{2}{\pi}x + 2$$
$$x \in [\frac{\pi}{2}; \pi]$$

Варіант 5

$$\mathrm{y} = -\mathrm{x} + 1$$
$$\mathrm{y} = (\mathrm{x} - 1)^2$$
$$\mathrm{x} \in [0; 1]$$

Варіант 6

$$y = -\frac{x}{2} + 1$$
$$y = (x - 1)^2$$
$$x \in [1.5; 2]$$

Варіант 7

$$y = \sqrt{x}$$
$$y = x^2$$
$$x \in [1; 2]$$

Варіант 8

$$y = \frac{2}{\pi} x$$
$$y = \sin x$$
$$x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$$

Варіант 9

$$y = \sqrt{x}$$
$$y = x$$
$$x \in [0; 1]$$

Варіант 10

$$y = \sin x$$
$$y = \cos x$$
$$x \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right]$$

Варіант 11

$$y = x - 1$$
$$y = (x-1)^2$$
$$x \in [1; 2]$$

Варіант 12

$$y = \cos x$$
$$y = \sin x$$
$$x \in \left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right]$$

Варіант 13

$$y = x$$
$$y = x^2$$
$$x \in [1; 2]$$

Варіант 14

$$y = \frac{1}{2}x$$
$$y = (x-1)^2$$
$$x \in [0; 0{,}5]$$

Варіант 15

$$y = x$$
$$y = \sqrt{x}$$
$$x \in [1; 2]$$

Варіант 16

$$y = x^2 - 2x + 1$$
$$y = -x^2 + 2x$$
$$x \in [0; 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}]$$

Варіант 17

$$y = x^2 - 2x + 1$$
$$y = -x^2 + 2x$$
$$x \in \left[1 + \frac{1}{\sqrt{2}}; 2\right]$$

Варіант 18

$$y = sin\,x$$
$$y = cos\,x$$
$$y = 0$$
$$x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$$

Варіант 19

$$y = x^2$$
$$y = \sqrt{x}$$
$$x \in [0; 1]$$

Варіант 20

$$y = x^2 - 2x + 1$$
$$y = -x^2 + 2x$$
$$y = 0$$
$$x \in [0; 1]$$

Варіант 21

$$y = \frac{1}{2}x$$
$$y = (x - 1)^2$$
$$x \in [0,5; 2]$$

Варіант 22

$$y = x$$
$$y = x^2$$
$$x \in [0; 1]$$

Варіант 23

$$y = x^2 - 2x + 1$$
$$y = -x^2 + 2x$$
$$y = 1$$
$$x \in [0; 1]$$

Варіант 24

$$y = -\frac{x}{2} + 1$$
$$y = (x - 1)^2$$
$$x \in [0; 1,5]$$

Вимоги до оформлення роботи

Робота оформлюється в друкованому вигляді на папері стандартного формату А4, на одній стороні аркуша з дотриманням полів:

- зліва – 2,5 см
- зверху – 2 см
- знизу – 2 см
- справа – 1,5 см

Шрифт Times New Roman, розмір 14, міжрядковий інтервал 1,5. Всі сторінки мають бути пронумеровані починаючи зі змісту. Абзацний відступ 1,25 см. Текст в абзацах вирівнюється по ширині сторінки.

Заголовки структурних розділів оформлюються великими прописними літерами, вирівнюються по центру сторінки. Кожен структурний розділ повинен починатись з нової сторінки.

Заголовки глав виділяються міжрядковим інтервалом. Може використовуватись курсив або напівжирне форматування, розмір шрифту такий самий, як і загальний текст.

Скорочення слів не допускається, крім загальноприйнятих, при першому вживанні вони супроводжуються розшифровуванням.

Структура роботи:

- Титульна сторінка

  Приклад оформлення титульної сторінки наведено в додатку 1.
- Зміст
- Завдання
- Теоретичний опис використаних методів обчислення визначених інтегралів
- Математичні розрахунки

- Блок-схема алгорита розв’язку задачі та їх опис.

  Кожний блок повинен бути пронумерований. Усі блоки повинні бути стандартного розміру. Для зв’язку між блоками використовувати стрілочки.
- Текст програми.

  Міжрядковий інтервал для тексту програму одинарний, розмір шрифту 12, вирівнювання тексту з лівого краю.
- Результати роботи програми
- Висновки
- Список використаної літератури

Критерії оцінювання роботи

В переліку критеріїв оцінювання роботи наводиться частка (у відсотках) від максимального балу, який можна отримати за дану роботу. Максимальний бал залежить від конкретної рейтингової системи з навчальної дисципліни, в якій використовується дана розрахункова робота.

Критерій	**Частка (%)**
Оформлення роботи	15
Теоретичні знання використаних математичних методів	15
Теоретичні знання з програмування	10
Правильність теоретичних розрахунків	15
Знання написаної програми	15
Правильність роботи програми	30

Порядок захисту роботи

- Перевіряється правильність роботи програми. За наявності значних помилок робота не приймається і повертається на доопрацювання.
- Перевіряється оформлення роботи. У випадку, коли оформлення роботи має значну кількість недоліків, то така робота не приймається і повертається студенту на доопрацювання.
- Перевіряється відповідність теоретичних обрахунків та практичних результатів.
- Перевіряються теоретичні знання студента.

Список літератури

1. Бахвалов Н.С. Численые методы. – М.: Наука, 1975 – 631 с.
2. Калиткин Н.А. Численые методы. – М.: Наука, 1978 – 512 с.
3. Демидович Б. П. Марон И.А. Основы вычислительно математики. – М.: Наука, 1966 – 664 с.
4. Волков Е.А. Численые методы. – М.: Наука, 1982 – 254 с.

Додаток 1

Приклад титульного аркушу розрахункової роботи

Міністерство освіти і науки України
Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут»
Інститут енергозбереження та енергоменджменту
Кафедра електропостачання

Розрахункова робота

з дисципліни

«Обчислювальна техніка та алгоритмічні мови»

Перевірив:
Петренко П.П.

Виконав:
Студент гр. ОН-99
Іваненко І.І.

Київ – 2016